

light, at an hundred foot distance, and that at an hundred and twenty foot distance I could discern some of the words. When I made this tryal, its Aperture (defined next the Eye) was equivalent to more than an inch and a third part of the Object-metall. This may be of some use to those that shall endeavour any thing in *Reflexions*; for hereby they will in some measure be enabled to judge of the goodness of their Instruments, &c.

N. B. The Reader may expect in the *next Month* another Letter, which came somewhat too late to be here inserted; containing a *Table*, calculated by the same Mr. *Newton*, about the several *Apertures* and *Charges* answering the several *Lengths* of these Telescopes.

## E P I T O M E

*Binæ Methodi Tangentium* Doctoris *Johannis Wallisi* Geom. Prof. *Saviliani Oxoniæ*; aliàs fufius & explicatius ab ipso traditæ, hîc verò ob angustiam loci compendifactæ: In quarum Schematîsmis si forsan literæ quædam redundaverint, illæ ad ea pertinere censendæ sunt, quæ in ampliori ejusdem Scripto continentur, hîc vero dictâ de causa omitantur.

**H** Abes hic (*Clarissime vir*) eorum summam (*strictim traditam*) quæ fufius scripseram, meas de Tangentibus Methodos spectantia; duas potissimum quibus præsertim utor; alteram in Speciebus, alteram in Lineis; utramque generali formâ facîle explicabilem.

Priorem adhibeo *Con. Sect. prop. 23, 30, 36, 46, 49. & passim alibi.*  
*Quæ hæc est.*

Expositâ Curvâ *Aa*, (putâ *Parabola*, fig. 4.) quam in *a* tangat *a F*, diametro *VDA* occurrens in *F*; ordinatim applicentur *a V*, & *DOI* curvæ in *O* & tangenti in *T* occurrens. Ponatur autem *Va = b*, *VA = v*, *VF = f*, *VD = a*, adeoque *DA = v ± a*, *DF = f ± a*:

Est (propter similitudinem triangula)  $VF \cdot DF :: Va \cdot DT = \frac{f \pm a}{f} b$ .

Item, si tangens sit ultra curvam,  $DT > DO$ ; si citra,  $DT < DO$ : Nempe,  $DT = DO$  si intelligatur *D* in *V*; sed, si extra *V*, *DT* vel *DO* major prout tangens est ultra citrave curvam.

Tum,

Tum, habita ipſus DO designatione quæ ſit expoſita curvæ accomodatæ ; (puta, in Parabola, propter AV. AD :: Vaq.  $DOq = \frac{v \pm a}{v} b^2$  ;  $DO = b \sqrt{\frac{v \pm a}{v}}$  :) fiat debita reductio, (puta, propter  $\frac{f \pm a}{f} b > b \sqrt{\frac{v \pm a}{a}}$ , adeoque  $\frac{f^2 \pm 2fa + a^2}{f^2} > \frac{v \pm a}{v}$ , &  $f^2 v \pm 2fv a + v a^2 > f^2 v \pm f^2 a$  ; deletis utrinque æqualibus, hoc eſt, iis omnibus in quibus a non conſpicitur ; cæteriſque per  $\pm a$  diviſis :  $2fv \pm va > f^2$ .)

Tandem (qui methodi nucleus eſt) poſito D in V, (quod ſit  $a = 0$ , adeoque evaneſcant ipſus multipla omnia,) æquatio exhibebit ſi quaſitam (puta  $2fv \pm va = 2fv = f^2$ , adeoque  $2v = f$ .)

Hanc (locis citatis) accomodatam videas Parabolæ, Ellipſis, Circuloſe, Hyperbolæ, Paraboloidibus omnibus, (quibus & harum Reciprocas aſcenſeo,) atque alibi aliis.

Ciſſoidi (fig. 5.) ſic accommodes. Eſt (per cap. 5. pr. 29. de Motu)  $Va = b = \frac{v^2}{\sqrt{vh}}$ , (poſito s pro ſinu recto in circulo generante, cujus radius r, ſinus verſus v, &  $2r - v = h$ , &  $h - v = 2\kappa$ ,) adeoque ; (ſubſtitutis  $v \pm a$  pro v, &  $h \mp a$  pro h,)  $\frac{v^2 \pm 2va + a^2}{v : v h \pm 2\kappa a - a^2} (= DO) >$   
 $(DT = \frac{f \pm a}{f} b =) \frac{f \pm a}{f} \times \frac{v^2}{\sqrt{vh}}$ . Ergo (ſumptis quadratis, & multiplicando decuſſatim,)  $f^2 v^3 h \pm 6f^2 v^3 h a^2 + f^2 v h a^4 \pm 4f^2 v^4 h a \pm 4f^2 v^2 h a^3 > f^2 v^3 h \pm 2fv^3 h a \pm v^3 h a^2 \pm 2f^2 v^4 \kappa a + 4fv^4 \kappa a^2 \pm 2v^4 \kappa a^3 - f^2 v^4 a^2 \mp 2fv^4 a^3 - v^4 a^4$  : item (deletis utrinque æqualibus, cæteriſque per  $\pm va$  diviſis)  $\pm 6f^2 v^2 h a \pm f^2 h a^3 + 4f^2 v^3 h + 4f^2 v h a^2 > 2fv^4 h \pm v^4 h a + 2f^2 v^3 \kappa \mp 4fv^3 \kappa a \pm 2v^3 \kappa a^2 \mp f^2 v^3 a - 2fv^3 a^2 \mp v^3 a^3$ . Denique (poſito D in V, quo evaneſcat a cum ſuis multiplis, cæteriſque per  $2fv^3$  diviſis) fiet æquatio  $2fh - f\kappa = v h$ , adeoque  $\frac{vh = 5^2 \kappa^2}{2h - \kappa = r + h = 3r - v} = f$ .

Idem ſuccedet, ſumptâ, pro VA, diametro TA, (cui tangens occurrat in  $\phi$ ) aliâ  $\frac{VE}{E}$ . Item, ſi exponeretur curva quæ ordinatas non habeat, ſed quæ his æquipolleant ; ut ſunt, in Spirali, crescentes radii.

Sed & calculi magna pars præverte poteſt ; omiſſis ab initio (utpote poſt reiſciendis) terminis iis ubi habetur  $\kappa^2$  vel ſuperior hujus poteſtas ; item iis in quibus nec a conſpicitur, nec ſunt in a ducendi, (utpote æqualibus utrinque prodituris.) Exempli gratiâ,

In Conchoide, (fig. 6.) *cujus ordinata VMa constat ex sinu recto*  
 $VM = s = \sqrt{vh}$ , & *tangente Ma = CH =*  $\frac{s}{x}r$ , (si sit  $CP = CA = r$ ,  
adeoque  $CH = AS$ ;) *saltem =*  $\frac{s}{x}p$  (posito  $CP = s$ ;) adeoque  $Va = b$   
 $= s + \frac{s}{x}r = \frac{x+r}{x}s = \frac{h}{x}s$ , *saltem*  $\frac{x+p}{x}s = \frac{h}{x}s = \frac{h}{x}\sqrt{vh}$  (posito  $x+p = n$ .)  
Ergo  $DT = \frac{f \pm a}{a}b = \frac{f \pm a}{f x n} \sqrt{vh} \geq DO = \frac{n \mp a}{x \mp a} \sqrt{vh} \pm 2xa -$  (omitto  
 $a^2$ , *quia post delendum, indeque oriunda, & sic semper:*) & *sump-*  
*tis quadratis,*  $\frac{f \pm a}{f x n} \sqrt{vh} \geq \frac{n^2 v h \pm 2 n^2 x a \mp 2 n v h a \pm}{x^2 \mp 2 x a -}$  (hoc est,  $\geq$  *su-*  
*pra, sed  $\leq$  infra, punctum flexus contrarii.) Et, decussatim multi-*  
*plicando; omissis (ut precipitur)  $f^2 x^2 n^2 v h$  utrobique, omnibus-*  
*que  $a^2$  multiplicis; ceterisque per  $\pm a$  divisis;  $2 f n^2 v h x^2 - 2 f^2$*   
 $n^2 v h x \pm \geq 2 f^2 n^2 x^3 - 2 f^2 n v h x^2$ : *adeoque (posito D in V,)*  
 $n v h x \pm = f n v h \pm f n x^2 - f v h x = f n r^2 - f v h x$  (propter  $v h \pm$   
 $x^2 = s^2 + x^2 = r^2$ ;) &  $f = \frac{v h = s^2}{n r^2 - v h x} n x$ . *Et quidem, in prima-*  
*ria, (propter  $h = n$ ;)  $f = \frac{s^2 x}{r^2 - x^2}$ .*

In Figura Tangentium (fig. 7.) *quæ à Conchoide differt, ex-*  
*empto quadrante genitore; idem erit processus, nisi quod, propter*  
 $Va = Ma = \frac{p}{x}s$  (non  $\frac{n}{x}s$ ;) *prodibit (sive in primaria, sive in pro-*  
*tracta contractave,)  $f = \frac{v h = s^2}{r^2} x$ .*

In Figura Secantium (fig. 8.) *propter  $Va = b = \frac{r^2}{x}$ ; erit*  
 $DO = \frac{r^2}{x \mp a} \geq \frac{f \pm a}{f x} r^2 = DT$ . *adeoque  $f = x$ .*

*Cumque hæc curva sit Hyperbola (per pr. 30. cap. 5. & pr. 1. cap.*  
15. *de Motu,)* *cujus Asymptotæ CA, CB: eadem tangens habetur*  
*per pr. 36. Con. sect. Cumque ordinatæ ad asymptotas (per pr.*  
94, 95, *Arith. Infin.) fiat series Reciproca Primanorum*  
*(quæ ad Paraboloidium genus spectat, verticem habens C, exponen-*  
*tem -1,) habetur eadem tangens per prop. 49. Con. Sect. (eadem-*  
*que est expedita methodus pro hyperbolæ cujusvis tangente per asym-*  
*ptotam inveniendâ.) Quippe, in Paraboloidibus omnibus, ut in-*  
*tercepta diameter VC, ad VF, sic 1 ad exponentem: hoc est, in præ-*  
*senti casu, ut 1 ad -1; adeoque VC = VF, sed (propter contraria*  
*signa + -) ad contrarias partes.*

*Notandum hic; in Parabolâ, Paraboloidè, Hyperbolâ, Ellipsi,*  
*&c. figurâve Sinuum (rektorum, versorumve,) Arcuum, Tan-*  
*gentium,*

gentium, Secantium, &c. aliâve cujus constructio est Similaris ; protractio contractiove figuræ (seu mutatio Lateris recti, aut quod bujus instar est,) non mutat punctum F, (eo quod Latus-rectum æquationem quæ longitudinem VF determinat non ingrediatur, utut eam ingrediatur quæ determinat longitudinem Va, mutetque angulos ad a & F :) sed ubi constructio est Dissimilaris, ut in Cycloïde & Conchoïde (propter ordinatam illic ex Sinu & Arcu, hîc ex Sinu & Tangente, conflataz,) aliisque istiusmodi, res secus est : tò quòd una pars (ut Arcus in Cycloïde & Tangens in Conchoïde) protractitur contrahiturve, manente alterâ (putâ, in utrisque Sinu recto) ut in primariâ.

Idemque dicendum de Angulo applicationis (ad V,) cujus mutatio non mutat longitudinem VF, sed neque Va, quia neutrius ingreditur æquationem. Atque hinc fit, quòd in figura Scalena, quæ ordinatas contrarias, utrinque ad V positas, spectant tangentes, utut inæquales, in eodem F conveniant. Sed & (ut hoc obiter moneam) quadratorum aggregatum habent idem atque in erectâ ; nempe semper  $= 2 Va q + 2 VF q$ .

Estque hæc mihi methodus pro Maximis & Minimis in omne genus quantitativibus.

Methodus altera (secundùm tradita de Angulo Contactus & Arithm. Infin.) curvam considerat tanquam ex particulis conflataz infinitè exiguis, sed certam positionem habentibus ; eandem nempe (propter contactûs angulum sive nullius magnitudinis sive infinitè exigua) cum rectâ ibidem tangente : adeoque cum hac (respectu cuiusvis rectæ) pariter declivem, (ut est Montis Aa fig. 4, 5, declivitas in a, eadem quæ tangentis a F.) Cujus ergo quæque particula (per cap. 2. de Motu) est in eâ ratione magis longa (quàm est respectiva expositæ rectæ particula æquè-alta) quàm est minus declivis ; puta aT quàm VD : Unde, propter mutatam in singulis punctis declivitatem, oritur series longitudinum inæqualium in curvâ, seriei æqualium in rectâ, respondens ; curvæ ad rectam rationem exhibens. Atque hinc methodus mea pro curvis rectificandis, (schol. prop. 38. Ar. Infin. insinuata,) quam prosequor tractatu de Evolutis, item de motu cap. 5. prop. 13. & seqq. Cujus aliqua pars est hæc de Tangentibus, ut quæ non totam declivitatum seriem perpendit, sed eam quæ est in exposito puncto.

Hanc respectivam particularem longitudinem, aliàs insinuatam  
eunt

cunt (motu forinfecus assumpto) per motuum quibus transigantur ἰσοχρόνον celeritatem. ( Quippe idem est, in Motu, Celeritas, atque hæc, in Situ (propter positionem obliquam seu minus declivem) respectiva Longitudo.) Aptissimè quidem in lineis a motu primitus oriundis, (putà, Cycloide, Conchoide, Spirali, Quadratrice, &c.) nec ineptè in aliis, quæ fingi saltem possunt istiusmodi motibus describi.

Præsumo autem (ex prop. 15. cap. 2. de Motu) eam esse curvæ in quovis puncto directionem, adeoque & declivitatem, quæ est rectæ ibidem tangentis: Item (ex prop. 6. cap. 10.) Motus compositi directionem esse in Diagonio parallelogrammi, cujus latera & anguli exhibeant componentium celeritates & directiones.

Intelligatur jam (fig. 4.)  $Aa$  parabola, describi motu composito, ex æquabili secundum  $AY$  vel  $Va$ , cujus itaque particule ἰσοχρόνοι (per pr. 3. cap. 10. de Motu) sunt series Primanorum, quæ ad seriem totidem ultimæ equalium, (hoc est, ad rectam ἰσοχρόνον celeritate in  $a$  acquisitâ transigendam,) est ut 1 ad 2, (per Ar. Infin. pr. 64. vel pr. 1. cap. 5. de Motu.) Adeoque, sumpta  $VF = 2VA$ , & completo  $FVa$  parallelogrammo; juncta  $aF$  est Tangens.

Idem similiter obtinebitur in Paraboloidibus quibuscunque, ope prop. 2, 5, 6, 7, de Motu.

Atque inde facile (vel ex iisdem principiis) ostenditur; si intelligatur Fig.  $AY$  sic constituta, ut momenta (respectu  $AF$ ) ordinatarum  $Yv$ ,  $yw$ , sint ipsis  $Ya$ ,  $yO$ , ordinatis proportionalia; erunt Celeritates acquisitæ in  $a$ ,  $o$ , seu  $V$ ,  $D$ , (positâ  $AY$  linea motus æquabilis) rectis  $Yz$ ,  $yw$ , proportionales: Et consequenter, ut  $AoY$  (illarum aggregatum) ad  $AFoY$  (aggregatum totidem maximæ equalium,) sic  $VA$  (aggregatum celeritatum sex particularum crescentium) ad (aggregatum totidem maximæ equalium)  $YF$ .

Spiralis  $ASa$  (fig. 9.) punctum  $a$  designatur motu composito ex recto per  $Aa$ , & circulari per  $Va$ , æquabilibus utrisque & ἰσοχρόνοισι. Ergo, sumpta circuli tangente  $aw = aV$ , & completo  $AawF$  parallelogrammo; juncta  $aF$  Spiralem tanget.

Unde statim emergit Archimæda quadratura (sive Circuli sive Sectoris cujuscvis) propter  $AF = aw = aV$ .

sin motuum alter, puta  $Aa$ , sit acceleratus vel retardatus; pro

$aA$ , sumenda erit  $aB$  (in ea ad illuminationem quam illa postulat acceleratio seu retardatio,) eritque diagonium  $a\beta$ , Tangens quaesita.

Quadratricis  $AaB$  (fig. 10.) punctum  $a$  designatur motu composito ex recto per  $va$ , & circulari in  $\Upsilon a$  (æquabilibus &  $\text{ισοχρήτοις}$ .) Ergo, sumpta tangente  $aV = a\Upsilon$ , & completo parallelogrammo  $VvaF$ , juncta  $aF$  tanget Quadratricem.

Atque hinc alia quadratura, per Tangentem quadratricis, propter  $vF = aV = a\Upsilon$ .

Illam per quadratricis Basin, sic elicitur. Positis  $CA = r$ ,  $AQ = q$ ,  $\Upsilon Z = \chi$ ,  $QR = a$ . Erit (propter Quadratricis constructionem)  $AQ : RQ :: AC : AE = \frac{3}{4}r :: \Upsilon Z : aZ = \frac{3}{4}\chi$ . Estque  $aZ > aE$  sumpto ubivis in  $AB$  puncto  $a$ , præterquam in  $B$ , quo casu (evanescente utraque) erit  $aZ = aE$ , adeoque  $\chi = r$ ; hoc est,  $\Upsilon Z = XB = AC$ . Sed &  $vE$  communis tangens utrique curvæ  $XB$ ,  $AB$ .

Cycloidis (fig. 11.) punctum  $a$  describitur motu composito, ex recto in  $aV$ , & circulari in  $a\beta$  (æquabilibus & æquè-velocibus.) Ergo, sumpta tangente  $va = aV$ , & completo  $VvaF$  parallelogrammo, juncta  $aF$  Cycloidem tanget. Et quidem, propter Ang.  $vaF (= a\beta F = \frac{1}{2}aCF) = \frac{1}{2}vaV$ , occurret circuli  $a\beta$  erectæ diametro in vertice.

In secundariis (contractâ protractâve) sumenda erit  $va$  ad  $aV$ , in ea ratione major minorve, quâ est celeritas motûs circularis ad celeritatem recti.

In Figura Arcuum, Sinuumve, (fig. 12.) procedendum ut in Cycloide, nisi quod (propter exemptum semicirculum genitorem) pro tangente  $va$  illic (quæ hîc est  $a\Upsilon$ ) sumenda erit erecta  $va$  æqualta.

Conchoidis (fig. 6.) punctum  $a$  designatur motu composito, ex æquabili circulari in  $a\beta$  (hujusve tangente  $va$ ) & recto in  $a\Upsilon$  accelerato pro incremento tangentium: quæ quidem acceleratio duplex est, altera propter declivitatis angulum  $\beta a\Upsilon$ , hoc est,  $va\Upsilon$ , continuè crescentem; altera propter radii in secantem protractionem, continuè item crescentem. Propter priorem, ducta tangente  $va$  (quæ occurrat in  $v$  regulæ  $CH$ ), recta  $v\zeta$  (parallela rectæ  $PH$ ), occurrat  $a\Upsilon$  in  $\zeta$ : Propter posteriorem; eadem  $v\zeta$  protracta occurrat tangenti verticis in  $Z$ : indeque  $Z\Upsilon$  rectæ  $vaX$  parallela; adeoque  $a\Upsilon = XZ$ .

$aZ :: CM. As :: P\mu. PH.$  Completo denique  $Taof$  parallelogrammo, juncta  $a f$  tanget conchoidem.

In secundariis (ubi non est  $CP=CA$ .) sumenda erit  $aY$  ad jam designatam, ut est  $CP$  ad  $CA$ .

In Figura Tangentium (fig. 7.) propter exemptum Conchoidi quadrantem genitorem, pro tangente  $av$  illic (quæ hîc est  $ar$ ) sumenda erit erecta  $av$  aequè-alta.

Pluribus exemplis proferendis supersedeo. Moneo tamen, utramvis Methodum, utut tangentibus rectis hîc accommodatam, extendi posse ad mutuum Curvarum tactum. Puta; si, pro  $FVa$  triangulo (fig. 4,5,) intelligatur Hyperbola; recta  $DT$ , quæ hîc insignitur caractere qui triangulo conveniât, subire tum debet characterem Hyperboies; cujus vertex  $F$  simili processu quærat. Similisque in posteriori methodo accommodatus est linearum ductus. Et quidem, cum curvam  $Aa$  tangens recta  $aF$ , sit etiam tangens communis curvarum omnium, expositam ibidem tangentium; prout hîc, ex data  $Aa$  curva quæritur recta  $aF$ , sic ex hac datâ (per eandem methodum inversam) quærenda erit alia tangens curva, modò (satis sit determinata.

Sed ampliandum non est. Tu itaque Vale.

Tuus

Oxoniz die 15.  
Febr. 1671.

Johannes Wallis.

Extract

